



## Analisis Keakuratan Metode Numerik dalam Menyelesaikan Turunan Fungsi

Amin Harahap<sup>1</sup>, Agustin Ningsih<sup>2</sup>, Ayu Widya Ningrum<sup>3</sup>, Indah Kumala Sari<sup>4</sup>, Sarah Dwi Artika<sup>5</sup>

<sup>1,2,3,4,5</sup>Universitas Labuhanbatu, Indonesia

Email: [aminharahap19@gmail.com](mailto:aminharahap19@gmail.com)<sup>1</sup>, [agustinningsih251@gmail.com](mailto:agustinningsih251@gmail.com)<sup>2</sup>,  
[ayuwidyaningrum47@gmail.com](mailto:ayuwidyaningrum47@gmail.com)<sup>3</sup>, [indrikumalasarii24@gmail.com](mailto:indrikumalasarii24@gmail.com)<sup>4</sup>,  
[sarahdwiartika@gmail.com](mailto:sarahdwiartika@gmail.com)<sup>5</sup>

### Abstract

*In science and engineering, problems related to determining derivatives are frequently encountered in various studies. However, not all function derivatives can be solved analytically due to the complex nature of the equations. Therefore, a numerical approach is needed to obtain approximate derivative values. Some common methods used in solving numerical derivatives include the forward difference method, the backward difference method, and the central difference method. This study aims to compare the accuracy of these three methods in determining the derivative value of a function. The obtained derivative value is then compared with the exact derivative value to determine the magnitude of the error produced by each method.*

*Keywords: copper downstreaming, value chain, end product, industry policy, recycling*

### Abstrak

*Dalam bidang sains dan teknik, permasalahan yang berkaitan dengan penentuan turunan sering dijumpai dalam berbagai kajian. Namun, tidak semua turunan fungsi dapat diselesaikan secara analitik karena bentuk persamaannya yang kompleks. Oleh sebab itu, diperlukan pendekatan numerik untuk memperoleh nilai turunan secara hampiran. Beberapa metode yang umum digunakan dalam penyelesaian turunan numerik antara lain metode beda maju, metode beda mundur, dan metode beda pusat. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan tingkat keakuratan ketiga metode tersebut dalam menentukan nilai turunan suatu fungsi. Nilai turunan yang diperoleh kemudian dibandingkan dengan nilai turunan eksaknya sehingga dapat diketahui besar kesalahan (error) yang dihasilkan oleh masing-masing metode.*

*Kata kunci: hilirisasi tembaga, rantai nilai, produk akhir, kebijakan industri, daur ulang*

### PENDAHULUAN

Menurut Atmika (2016), turunan numerik merupakan salah satu teknik penyelesaian masalah yang dirumuskan secara matematis melalui proses perhitungan. Dalam berbagai aktivitas sehari-hari, banyak permasalahan yang dapat direpresentasikan dalam bentuk model matematika menggunakan turunan numerik. Proses perhitungannya umumnya melibatkan operasi hitung yang cukup banyak, sehingga dalam praktiknya sering kali memerlukan bantuan

komputer agar perhitungan dapat dilakukan secara lebih efisien dan akurat. Berbagai persoalan dalam bidang ilmu pengetahuan dapat direpresentasikan dalam bentuk model matematika yang berasal dari fenomena-fenomena kompleks. Untuk mempermudah penyelesaiannya, diperlukan beberapa asumsi penyederhanaan. Namun demikian, meskipun telah dilakukan penyederhanaan, tidak semua persamaan dapat diselesaikan secara analitik, sehingga diperlukan pendekatan turunan numerik sebagai alternatif penyelesaiannya.

Metode numerik merupakan teknik atau algoritma matematika yang digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam matematika yang sulit atau tidak dapat diselesaikan secara analitik (eksak), dengan melakukan pendekatan menggunakan perhitungan numerik. Metode numerik memanfaatkan perhitungan berulang (iterasi) dan biasanya dibantu oleh komputer untuk memperoleh solusi dengan tingkat ketelitian tertentu. Sederhananya, metode numerik bertujuan untuk memperoleh solusi yang mendekati nilai sebenarnya dengan kesalahan yang dapat dikendalikan.

Menurut Maure (2021), metode numerik memberikan hasil penyelesaian berupa nilai hampiran yang tidak sepenuhnya sama dengan solusi sebenarnya. Meskipun demikian, tingkat keakuratan metode ini dapat dinilai dari besarnya kesalahan (error) yang dihasilkan, di mana hasil yang baik ditunjukkan oleh nilai error yang semakin kecil. Pada umumnya, proses perhitungan dalam metode numerik dilakukan secara berulang atau iteratif dengan tujuan memperoleh tingkat ketelitian yang optimal.

## **METODE PENELITIAN**

Permasalahan turunan numerik berkaitan dengan penentuan nilai hampiran turunan suatu fungsi  $f(x)$  yang biasanya disajikan dalam bentuk tabel. Secara konsep, turunan didefinisikan sebagai limit dari hasil bagi selisih nilai fungsi  $f(x + h)$  dan  $f(x)$  dan terhadap selang yang sangat kecil, yaitu  $h$ . Dalam praktiknya, perhitungan limit tersebut didekati menggunakan beberapa metode numerik. Terdapat tiga pendekatan utama yang umum digunakan dalam menentukan turunan numerik, yaitu metode beda maju, metode beda mundur, dan metode beda pusat.

### **a) Metode Beda Maju**

Metode beda maju merupakan salah satu pendekatan numerik yang didasarkan langsung pada konsep dasar turunan. Dalam penerapannya, metode ini dilakukan melalui beberapa langkah.

1. mendefinisikan fungsi  $f(x)$  yang akan dicari nilai turunannya.

2. Definisikan fungsi turunan  $f'$  eksak ( $x$ ) sebenarnya.
3. Masukkan nilai pendekatan awal : batas bawah  $a$ , batas atas  $b$ , dan nilai step  $h$
4. Untuk  $x = a$  sampai dengan  $b$ , hitung:  $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
5. Tampilkan nilai  $x$ ,  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , dan  $f'$ , eksak ( $x$ ).

Untuk menyelesaikan turunan metode beda maju dapat menggunakan rumus :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

#### b) Metode Beda Mundur

Metode beda mundur merupakan metode yang konsep perhitungannya berlawanan dengan metode beda maju. Metode ini menggunakan titik di belakang titik yang ditinjau sebagai dasar dalam menentukan nilai turunan. Dalam penerapannya, metode beda mundur dilakukan melalui beberapa langkah perhitungan yang sistematis. Definisikan fungsi  $f(x)$  yang akan dicari nilai turunannya.

1. Definisikan fungsi turunan  $f'$  eksak ( $x$ ) sebenarnya.
2. Masukkan nilai pendekatan awal : batas bawah  $a$ , batas bawah  $b$ , dan Nilai step  $h$ .
3. Untuk  $x = a$  sampai  $b$  hitung:  $f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ .
4. Tampilkan nilai  $x$ ,  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , dan  $f'$  eksak ( $x$ ).
5. Pada metode ini titik hampiran kedua yang diambil adalah titik belakang hampiran pertama. Jika mulai diambil titik  $x$  maka titik kedua adalah  $x-h$ . Adapun Sehingga rumus untuk mencari turunan dari  $f(x)$  adalah sebagai berikut:  $f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ .

#### c) Metode Beda Pusat

Metode beda pusat merupakan metode pengambilan perubahan dari dua titik disekitar titik yang diukur. Metode selisih pusat/tengahan adalah rata rata dari 2 selisih maju. Adapun algoritma metode beda pusat diantara lain :

1. Definisikan fungsi  $f(x)$  yang akan dicari nilai turunannya.
2. Definisikan fungsi turunan  $f'$  eksak ( $x$ ) sebenarnya.
3. Masukkan nilai pendekatan awal: batas bawah  $a$ , batas bawah  $b$ , dan nilai step  $h$ .
4. Untuk  $x = a$  sampai dengan  $b$ , hitung:  $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$
5. Tampilkan Nilai  $x$ ,  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , dan  $f'$  eksak( $x$ ).

Metode selisih pusat/tengahan adalah rata – rata dari 2 selisih maju, yaitu:

- Rumus selisih maju pada titik  $(x - h)$ , yaitu :

$$f_1'(x_0 - h) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

- Rumus selisih maju pada titik  $x$ , yaitu :

$$f_2'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Maka rumus umum diferensial metode beda pusat adalah :

$$f'(x_0) = \frac{f_1(x_0 - h) - f_2'(x_0)}{2}$$

$$f'(x_0) = \frac{\left(\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}\right) + \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right)}{2}$$

$$f'(x_0) = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}}{h}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Metode Beda Maju

Tentukan turunan fungsi  $f(x) = x^2 - 1$  di  $x = 1$  jika diketahui  $h = 0,1$ . Tentukan juga nilai error relatifnya!

Penyelesaian:

Nilai eksak/analitik:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2.1 = 2$$

- $h = 0,1$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(1) = \frac{f(1 + 0,1) - f(1)}{0,1} = 2,1$$

Error relatifnya:

$$\varepsilon_R = \frac{|a - \hat{a}|}{a} \times 100\% = \frac{|2 - 2,1|}{2} \times 100\% = 0,05$$

## 2. Metode Beda Mundur

Hitunglah turunan  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$  di  $x = 1$  jika diketahui  $h = 0,05$ .

Penyelesaian:

Nilai eksak:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 2x^2 - x \\f'(x) &= 3x^2 - 4x - 1 \\f'(1) &= 3(1)^2 - 4(1) - 1 = -2\end{aligned}$$

- $h = 0,05$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

$$f'(1) = \frac{f(1) - f(1 - (0,05))}{0,05} = -40,85$$

## 3. Metode Beda Pusat

Hitunglah turunan  $f(x) = x^2 - 3,3x + 2,3$  di  $x = 1$  jika diketahui  $h = 0,1$ .

Penyelesaian:

Nilai eksak:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 3,3x + 2,3 \\f'(x) &= 2x - 3,3 \\f'(1) &= 2(1) - 3,3 = -1,3\end{aligned}$$

- $h = 0,1$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f'(1) = \frac{f(1 + 0,1) - f(1 - 0,1)}{2(0,1)} = -1,3$$

Berdasarkan perhitungan turunan numerik yang telah dilakukan dengan menggunakan metode beda maju, metode beda mundur dan metode beda pusat didapat nilai hampiran turunan fungsi yang akan dibandingkan dengan nilai turunan eksaknya. Perbandingan ini bermaksud untuk mengetahui tingkat keakuratan masing-masing metode melalui perhitungan error. Pada metode maju nilai turunan dihitung dengan menggunakan selisih nilai fungsi pada titik  $(x)$  dan  $x+h$ . Hasil perhitungan memperlihatkan bahwa nilai turunan numerik yang didapatkan mendekati nilai eksaknya, namun masih terdapat selisih yang ditunjukkan oleh nilai error relatif sebesar 0,05%. Hal ini memperlihatkan bahwa metode beda maju mampu memberikan pendekatan yang cukup baik, tetapi tingkat akurasinya masih dipengaruhi oleh besar langkah

h. Pada metode beda mundur, perhitungan turunan dilakukan dengan memakai selisih nilai fungsi pada titik  $x$  dan  $x-h$ . Hasil yang diperoleh memperlihatkan nilai turunan numerik yang juga mendekati nilai eksaknya. Namun, nilai error yang diperoleh relatif lebih besar dibandingkan metode beda maju terutama ketika nilai  $h$  cukup besar. Hal ini disebabkan oleh penggunaan titik belakang yang lebih sensitif terhadap perubahan nilai fungsi. Sedangkan pada metode beda pusat, turunan dihitung menggunakan dua titik di sekitar titik yang dituju, yaitu  $x+h$  dan  $x-h$ . Dengan nilai langkah  $h = 0,1$ , metode ini menghasilkan nilai turunan numerik yang paling mendekati nilai eksak dibandingkan dua metode lainnya. Error yang dihasilkan lebih kecil karena metode beda pusat memperhitungkan informasi fungsi secara simetris disekitar titik yang dituju.

Hasil perhitungan memperlihatkan bahwa ketiga metode numerik mampu memberikan pendekatan terhadap nilai turunan eksak, namun dengan tingkat keakuratan yang berbeda-beda. Perbedaan ini dipengaruhi oleh cara masing-masing metode mengambil titik pendekatan serta nilai langkah  $h$  yang digunakan. Metode beda maju dan metode beda mundur merupakan metode orde pertama, sehingga tingkat kesalahannya relatif lebih besar dibandingkan dengan metode beda pusat. Pada metode beda maju, kesalahan muncul dikarenakan pertimbangan perubahan fungsi kearah depan sedangkan pada metode beda mundur hanya mempertimbangkan perubahan fungsi kearah belakang. Akibatnya, kedua metode ini cenderung menghasilkan error yang lebih besar terutama jika fungsi mengalami perubahan yang cukup tajam. Metode beda pusat memiliki keunggulan karena menggunakan dua titik di sekitar titik yang ditinjau, sehingga menghasilkan pendekatan yang lebih seimbang. Secara teori, metode ini memiliki orde ketelitian yang lebih tinggi, sehingga error yang dihasilkan lebih kecil. Hal ini terbukti dari hasil perhitungan yang menunjukkan bahwa metode beda pusat memberikan hasil yang paling mendekati nilai turunan eksak.

Secara keseluruhan, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa metode beda pusat merupakan metode yang paling akurat dalam menyelesaikan persoalan turunan numerik dibandingkan metode beda maju dan metode beda mundur.

## **KESIMPULAN**

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa metode numerik mampu digunakan untuk menentukan nilai turunan fungsi yang sulit atau tidak dapat diselesaikan secara analitik. Metode beda maju, metode beda mundur, dan metode beda pusat memberikan nilai hampiran turunan yang mendekati nilai eksaknya dengan

tingkat keakuratan yang berbeda-beda. Metode beda maju dan metode beda mundur menghasilkan pendekatan turunan yang cukup baik, namun tingkat error yang dihasilkan masih relatif lebih besar karena kedua metode tersebut hanya menggunakan satu arah titik pendekatan. Besarnya error juga dipengaruhi oleh nilai langkah  $h$  yang digunakan dalam perhitungan. Metode beda pusat memberikan hasil yang paling akurat dibandingkan metode beda maju dan beda mundur. Hal ini disebabkan oleh penggunaan dua titik di sekitar titik yang ditinjau, sehingga menghasilkan pendekatan yang lebih seimbang dan tingkat kesalahan yang lebih kecil. Dengan demikian, metode beda pusat lebih direkomendasikan dalam penyelesaian persoalan turunan numerik apabila dibutuhkan tingkat ketelitian yang tinggi.

## **DAFTAR PUSTAKA**

- Atmika, I. K. (2016). *Diktat Mata Kuliah Metode Numerik*. Universitas Udayana.
- Hery Andi Sitompul, E. W. (2022). Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua Dengan Sistem Persamaan Nonlinier. *Jurnal Ilmiah Teknik Sipil*.
- Maure, O. P. (2021). Verifikasi Tingkat Keakuratan Beberapa Metode. *Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika Dan Pembelajarannya*.