Sinergi : Jurnal Ilmiah Multidisiplin
E-ISSN : 3109-0559
Volume 2 Nomor 1 Januari 2026

https://publikasi.ahlalkamal.com/index.php/sinergi

Penyelesaian Persamaan Linier Secara Numerik

Amin Harahap[1], Yeni Aryani[2], Nuraisya[3], Muthia Yusuf Rambe[4], Deka Sarmadian Ritonga[5]
[1,2,3,4,5]Universitas Labuhanbatu, Indonesia
Email: aminharahap19@gmail.com[1], yeni.aryani.2203@gmail.com[2], nuraisyahking15@gmail.com[3], muthiayusuf646@gmail.com[4], ritongadekasarmadian@gmail.com[5]

Abstract
Linear equations are algebraic equations in which each term consists of a constant or the product of a constant and a single variable. Systems of linear equations can be solved using numerical methods, which are generally classified into direct methods and iterative methods. Direct methods, also known as exact methods, include matrix inversion and various matrix decomposition techniques, while iterative methods obtain solutions through repeated approximation processes. This article aims to discuss the numerical solution of linear equations using iterative methods, specifically the Jacobi method and the Gauss–Seidel method. These methods are chosen because they are widely used in solving large-scale systems of linear equations and exhibit different convergence characteristics. The results of the study indicate that the Gauss–Seidel method generally converges faster than the Jacobi method.

Keywords: Linear Equations, Numerical Methods, Iterative Methods, Jacobi, Gauss–Seidel

Abstrak
Persamaan linier merupakan persamaan aljabar yang setiap sukunya mengandung konstanta atau hasil perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Sistem persamaan linier dapat diselesaikan menggunakan metode numerik, yang secara umum dibedakan menjadi metode langsung dan metode iteratif. Metode langsung, yang dikenal sebagai metode eksak, meliputi metode invers dan berbagai teknik dekomposisi matriks, sedangkan metode iteratif menghasilkan solusi melalui proses pendekatan berulang. Artikel ini bertujuan untuk membahas penyelesaian persamaan linier secara numerik dengan menggunakan metode iteratif, khususnya metode Jacobi dan metode Gauss–Seidel. Kedua metode tersebut dipilih karena sering digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier berukuran besar serta memiliki karakteristik konvergensi yang berbeda. Hasil kajian menunjukkan bahwa metode Gauss–Seidel umumnya memiliki tingkat konvergensi yang lebih cepat dibandingkan metode Jacobi.

Kata kunci: Persamaan Linier, Metode Numerik, Metode Iteratif, Jacobi, Gauss–Seidel

PENDAHULUAN

Sistem persamaan linier merupakan salah satu topik penting dalam aljabar linier yang banyak dipelajari dalam bidang matematika. Sistem persamaan linier sering dijumpai dalam berbagai permasalahan nyata, sehingga diperlukan suatu metode yang tepat untuk memperoleh penyelesaiannya. Secara umum, penyelesaian sistem persamaan linier dapat dilakukan melalui dua pendekatan, yaitu metode langsung dan metode tidak langsung. Metode langsung, yang dikenal sebagai metode eksak, mencakup metode invers matriks, eliminasi, substitusi, serta berbagai teknik dekomposisi matriks seperti dekomposisi LU, Cholesky, QR, Crout, dan ST. Sementara itu, metode tidak langsung dikenal sebagai metode iteratif, yang meliputi metode Jacobi, metode Newton, dan metode Gauss–Seidel.

Salah satu metode iteratif yang banyak digunakan dalam analisis numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan linier adalah metode Jacobi. Metode ini diperkenalkan oleh matematikawan asal Jerman, Carl Gustav Jakob Jacobi, pada abad ke-19. Metode iterasi Jacobi termasuk metode tak langsung yang diawali dengan suatu nilai pendekatan awal, kemudian dilanjutkan dengan proses iterasi berulang hingga diperoleh solusi yang memenuhi kriteria konvergensi. Metode ini umumnya diterapkan pada sistem persamaan linier berukuran besar, terutama yang memiliki banyak koefisien bernilai nol. Pada sistem dengan jumlah persamaan yang cukup besar, metode eliminasi, substitusi, dan determinan sering kali menjadi kurang efisien untuk digunakan.

Metode Gauss–Seidel merupakan metode iteratif lain yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, di mana nilai variabel yang telah diperoleh pada suatu iterasi langsung dimanfaatkan pada perhitungan iterasi berikutnya. Metode ini merupakan pengembangan dari metode Jacobi dan pada umumnya memiliki tingkat konvergensi yang lebih cepat. Metode Gauss–Seidel diperkenalkan oleh Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) dan Philipp Ludwig von Seidel (1821–1896). Meskipun memiliki prinsip yang serupa dengan metode Jacobi, perbedaan cara pembaruan nilai variabel menyebabkan perbedaan efisiensi dalam proses iterasi.

Berdasarkan uraian tersebut, artikel ini bertujuan untuk membahas penyelesaian persamaan linier secara numerik menggunakan metode iteratif, khususnya metode Jacobi dan metode Gauss–Seidel. Pembahasan difokuskan pada karakteristik serta perbandingan kedua metode dalam menyelesaikan sistem persamaan linier, sehingga diharapkan dapat memberikan gambaran mengenai efektivitas masing-masing metode dalam menyelesaikan permasalahan numerik.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian kajian pustaka dan analisis numerik yang bertujuan untuk mempelajari penyelesaian sistem persamaan linier menggunakan pendekatan numerik. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode iteratif Jacobi dan metode Gauss–Seidel, yang banyak diterapkan dalam penyelesaian sistem persamaan linier.

Sumber data yang digunakan berasal dari berbagai referensi, seperti buku ajar, artikel ilmiah, serta tugas akhir yang berkaitan dengan metode numerik dan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier yang dikaji dijadikan sebagai objek penelitian untuk dianalisis penyelesaiannya menggunakan metode Jacobi dan Gauss–Seidel.

Tahapan penelitian dimulai dengan menentukan sistem persamaan linier yang akan diselesaikan. Selanjutnya, sistem persamaan tersebut disusun ke dalam bentuk yang sesuai agar dapat diterapkan pada metode iterasi Jacobi dan Gauss–Seidel. Setelah itu, ditetapkan nilai awal sebagai pendekatan awal dalam proses iterasi.

Proses iterasi dilakukan secara berulang hingga diperoleh hasil yang mendekati solusi sebenarnya. Iterasi dihentikan ketika hasil perhitungan telah memenuhi batas toleransi kesalahan yang ditentukan atau telah mencapai jumlah iterasi maksimum. Selanjutnya, hasil yang diperoleh dari metode Jacobi dan Gauss–Seidel dianalisis dan dibandingkan untuk mengetahui tingkat kecepatan konvergensi dan efektivitas masing-masing metode dalam menyelesaikan sistem persamaan linier secara numerik.

HASIL DAN PEBAHASAN

Metode Jacobi

Pada bagian ini dibahas penyelesaian sistem persamaan linier secara numerik menggunakan metode iterasi Jacobi. Metode Jacobi merupakan salah satu metode iteratif yang digunakan untuk memperoleh solusi sistem persamaan linier melalui proses pendekatan berulang hingga mencapai nilai yang konvergen. (Munir, 2010)

Misalkan diberikan suatu sistem persamaan linier yang terdiri dari tiga persamaan dengan tiga variabel sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Persamaan pertama dari sistem di atas dapat diubah untuk menghitung nilai x_1, sedangkan persamaan kedua dan ketiga digunakan untuk menghitung nilai x_2 dan x_3. Dengan demikian diperoleh bentuk iterasi sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_{1-}a_{32}x_3}{a_{33}}$$

Proses perhitungan diawali dengan menentukan nilai taksiran awal untuk setiap variabel. Nilai taksiran awal tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan iterasi untuk memperoleh nilai pada iterasi berikutnya. Proses ini dilakukan secara berulang hingga diperoleh nilai pendekatan yang mendekati solusi sebenarnya secara numerik.

$$x_1^n = \frac{(b_1 - a_{12}x_2^{n-1} - a_{13}x_3^{n-1})}{a_{11}}$$

$$x_2^n = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{n-1} - a_{23}x_3^{n-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^n = \frac{(b_3 - a_{31}x_1^{n-1} - a_{32}x_2^{n-1}}{a_{33}}$$

Iterasi dihentikan apabila nilai setiap variabel pada iterasi ke-n mendekati nilai pada iterasi sebelumnya, atau apabila galat relatif telah memenuhi kriteria yang ditentukan, yaitu:

$$x_1^{n-1} \approx x_1^n, x_2^{n-1} \approx x_2^n, dan\ x_3^{n-1} \approx x_3^n$$

Selain itu, iterasi juga dapat dihentikan apabila galat relatif memenuhi kriteria berikut:

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_i^n - x_i^{n-1}}{x_i^n}\right| 100\% < \varepsilon_s$$

dengan ε_s menyatakan batas toleransi kesalahan yang diinginkan.

Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss–Seidel merupakan salah satu metode iteratif yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (SPL) berukuran besar, khususnya sistem yang memiliki banyak elemen nol pada matriks koefisiennya. Sistem seperti ini sering dijumpai pada permasalahan yang berasal dari pemodelan persamaan diferensial.

Pada SPL berukuran kecil, metode iterasi umumnya jarang digunakan karena metode langsung, seperti eliminasi Gauss, dinilai lebih efisien. Namun, untuk SPL berukuran besar dengan persentase elemen nol yang tinggi, metode iteratif lebih unggul dibandingkan metode langsung, baik dari segi penggunaan memori maupun waktu komputasi. Oleh karena itu, metode Gauss–Seidel menjadi salah satu alternatif yang efektif dalam menyelesaikan permasalahan numerik berskala besar.Metode iterasi Gauss-Seidel dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\ (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{r} a_{ij}x_j^{(k-1)}\ )$$

Kriteria penghentian iterasi pada metode Gauss–Seidel ditentukan berdasarkan galat relatif yang sama seperti pada metode Jacobi, yaitu:

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_i^n - x_i^{n-1}}{x_i^n}\right| 100\% < \varepsilon_s$$

Iterasi dihentikan apabila galat relatif lebih kecil dari batas toleransi yang ditentukan.

Contoh Soal Numerik

Diberikan sistem persamaan linier:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 7$$
$$-2x_1 + 6x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 6$$

Sistem persamaan tersebut diselesaikan menggunakan metode iterasi Jacobi dan Gauss–Seidel dengan taksiran awal $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

Penyelesaian dengan Metode Jacobi

Berdasarkan sistem persamaan di atas, diperoleh bentuk iterasi Jacobi sebagai berikut:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{4}\left(7 + x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right)$$
$$x_2^{(k)} = \frac{1}{6}\left(9 + 2x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right)$$
$$x_3^{(k)} = \frac{1}{5}\left(6 - x_1^{(k-1)} - x_2^{(k-1)}\right)$$

Dengan menggunakan taksiran awal $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$, iterasi dilakukan hingga diperoleh nilai yang konvergen sesuai dengan batas toleransi galat yang ditentukan.

Penyelesaian dengan Metode Gauss–Seidel

Bentuk iterasi metode Gauss–Seidel untuk sistem persamaan tersebut adalah:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{4}\left(7 + x_2^{(k)} - x_3^{(k-1)}\right)$$
$$x_2^{(k)} = \frac{1}{6}\left(9 + 2x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)}\right)$$
$$x_3^{(k)} = \frac{1}{5}\left(6 - x_1^{(k)} - x_2^{(k-1)}\right)$$

Iterasi dilakukan menggunakan nilai hasil iterasi terbaru hingga memenuhi kriteria galat yang sama dengan metode Jacobi.

Berdasarkan hasil perhitungan numerik, kedua metode menghasilkan solusi yang sama untuk sistem persamaan linier tersebut. Namun, metode Gauss–Seidel mencapai solusi dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode Jacobi. Hal ini disebabkan oleh penggunaan nilai hasil iterasi terbaru pada metode Gauss–Seidel, sehingga proses konvergensi berlangsung lebih cepat.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan linier dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode iteratif, khususnya metode Jacobi dan metode Gauss–Seidel. Kedua metode tersebut mampu menghasilkan solusi yang sama untuk sistem persamaan linier yang diberikan, meskipun memiliki perbedaan dalam proses perhitungannya.

Metode Jacobi menggunakan nilai pendekatan dari iterasi sebelumnya pada setiap langkah perhitungan, sedangkan metode Gauss–Seidel memanfaatkan nilai hasil iterasi terbaru secara langsung. Perbedaan ini menyebabkan metode Gauss–Seidel secara umum memiliki laju konvergensi yang lebih cepat dibandingkan metode Jacobi. Oleh karena itu, metode Gauss–Seidel lebih efisien digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier berukuran besar, sementara metode Jacobi tetap dapat digunakan sebagai alternatif yang lebih sederhana dalam proses iterasi numerik.

DAFTAR PUSTAKA

Amelia, b. (2024). Sistem Persamaan Linear dengan Metode Gauss Seidel. *Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan*, 1.

Corry Corazon Marzuki, H. (2015). Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fully Fuzzy . *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 1.

Munir, R. (2010). *Metode Numerik.* Bandung: Informatika.

Rikarti, E. (2013). *Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Kompleks Menggunakan Metode Iterasi Gauss-Seidel.* Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru. Retrieved from https://repository.uin-suska.ac.id/4313/1/2013_2013119MT.pdf

Sukarna, M. A. (2019). Perbandingan Metode Iterasi Jacobi dan Metode Iterasi Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Linear Fuzzy. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 4.